Concursul „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XV-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2022
CLASA a XI-a

Subiectul 1.
Demonstrați că dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $A^2 = I_n$ dacă și numai dacă există două matrice $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A \cdot B = B$, $A \cdot C = -C$ și $B + C = I_n$.

Subiectul 2.
Considerăm matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pentru care $A + B = I_n$ și $A^2 = A^3$. Arătați că:
a) $(I_n - AB)^m = I_n - mAB,\ \forall m \in \mathbb{N}^*$;
b) funcția $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f(X) = X + AB(I_n - X)$ este inversabilă.

Subiectul 3.
Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir definit prin $a_1 > 0$ și $a_{n+1} = \dfrac{n \cdot a_n}{n + a_n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ are limită și calculați această limită.

Subiectul 4.
Șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ satisface relația de recurență $x_{n+1} = a \cdot x_n + \sqrt{b \cdot x_n^2 - 2}$, $n \geq 1$, $x_1 > 0$, unde a și b sunt numere naturale nenule, cu $b \cdot x_1^2 - 2 > 0$. Demonstrați că:
a) dacă $a = 2, b = 3$ și $x_1 = 1$, atunci $x_n \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$;
b) mulțimea $A = \left\{(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } x_n \notin \mathbb{Q}^*, \forall x_1 \in \mathbb{N}^*\right\}$ este infinită.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

SUCCES!

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

Concursul „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XV-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2022
BAREM DE CORECTARE CLASA A XI-A

Subiectul 1.
Demonstrați că dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $A^2 = I_n$ dacă și numai dacă există două matrice $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A \cdot B = B$, $A \cdot C = -C$ și $B + C = I_n$.

Soluție:

„$\Rightarrow$” $A^2 - I_n = 0_n \Leftrightarrow (A - I_n)(A + I_n) = (A + I_n)(A - I_n) = 0_n$. **1p**

Trebuie să găsim două matrice $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $(A - I_n) \cdot B = 0_n$, $(A + I_n) \cdot C = 0_n$ și $B + C = I_n$. Matricele $B = \frac{1}{2}(A + I_n)$ și $C = \frac{1}{2}(I_n - A)$ satisfac cerințele problemei............ **2p**

„$\Leftarrow$” $A \cdot B + A \cdot C = B - C \Rightarrow A(B + C) = B - C \Rightarrow A = B - C$. **2p**

$A \cdot B - A \cdot C = B + C \Rightarrow A(B - C) = I_n \Rightarrow A \cdot A = I_n \Rightarrow A^2 = I_n$. **2p**

Subiectul 2.
Considerăm matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pentru care $A + B = I_n$ și $A^2 = A^3$. Arătați că:

a) $(I_n - AB)^m = I_n - mAB, \ \forall m \in \mathbb{N}^*$;

b) funcția $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f(X) = X + AB(I_n - X)$ este inversabilă.

Soluție:

a) Observăm pentru început că matricele A și B comută. Într-adevăr $A \cdot B = A \cdot (I_n - A) = A - A^2 = (I_n - A) \cdot A = B \cdot A$. **1p**

De asemenea, pentru $m \geq 3$ se observă că $A^m = A^{m-3} \cdot A^3 = A^{m-3} \cdot A^2 = A^{m-1}$ și de aici , inductiv, $A^m = A^2$. **1p**

În plus,

$A^2 \cdot B^2 = A^2 \cdot (I_n - A)^2 = A^2 \cdot (I_n - 2A + A^2) = A^2 - 2A^3 + A^4 = A^2 - 2A^2 + A^2 = 0_n$ **1p**

Atunci $(I_n - AB)^m = I_n - C_m^1 AB + \underbrace{C_m^2 A^2 B^2 - \ldots + (-1)^m C_m^m A^m B^m}_{=0_n} = I_n - C_m^1 AB = I_n - mAB$

. ... **1p**

b) Observăm că

$(I_n + AB) \cdot (I_n - AB) = I_n - A^2 B^2 = I_n$ și că $f(X) = (I_n - AB)X + AB$. **1p**

<u>*Injectivitatea*</u> Fie $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $f(X_1) = f(X_2)$. Obținem imediat $(I_n - AB)X_1 = (I_n - AB)X_2$ și de aici $(I_n + AB)(I_n - AB)X_1 = (I_n + AB)(I_n - AB)X_2$, adică $I_n X_1 = I_n X_2$. Rezultă că funcția *f* este injectivă. **1p**

Surjectivitatea Fie $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Căutăm $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $f(X) = Y$. Rezultă $(I_n - AB)X + AB = Y$, apoi $(I_n - AB)X = Y - AB$. Înmulțind la stânga cu $I_n + AB$, obținem $X = (I_n + AB)(Y - AB) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Așadar f este surjectivă. Fiind și injectivă și surjectivă, funcția f este bijectivă și deci inversabilă. **1p**

Mai mult, putem afirma că inversa funcției f este funcția $f^{-1} : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f^{-1}(X) = (I_n + AB)(X - AB)$.

Subiectul 3 .

Fie $(a_n)_{n\ge1}$ un șir definit prin $a_1 > 0$ și $a_{n+1} = \dfrac{n \cdot a_n}{n + a_n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că șirul $(a_n)_{n\ge1}$ are limită și calculați această limită.

Soluție:

Evident că $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n}{n + a_n^2} < 1$, șirul $(a_n)_{n\ge1}$ este strict descrescător.

Șirul fiind descrescător și mărginit inferior de 0 este, conform teoremei de convergență a lui Weierstrass, un șir convergent. **2p**

Fie $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in [0, 1)$. De asemenea, tot datorită monotoniei, toți termenii șirului sunt mari sau egali cu L. Presupunem că $L > 0$.

Cum $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{n + a_n^2}{n \cdot a_n}$, obținem $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{a_n}{n}$, deci $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} \ge \dfrac{L}{n}$. **2p**

Atribuind lui n valorile 1, 2, ..., n–1 și apoi sumând inegalitățile obținute, rezultă $\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_1} \ge L\left(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n-1}\right),\ \forall n \ge 2$. Trecând la limită, deducem că $\dfrac{1}{L} - \dfrac{1}{a_1} \ge L \cdot \infty = +\infty$, ceea ce conduce la $L = 0$. Rezultă că presupunerea făcută este falsă și deci $L = 0$. **3p**

Subiectul 4 .

Șirul $(x_n)_{n\ge1}$ satisface relația de recurență $x_{n+1} = a \cdot x_n + \sqrt{b \cdot x_n^2 - 2}$, $n \ge 1,\ x_1 > 0$, unde a și b sunt numere naturale nenule, cu $b \cdot x_1^2 - 2 > 0$. Demonstrați că:

a) dacă $a = 2,\ b = 3$ și $x_1 = 1$, atunci $x_n \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) mulțimea $A = \left\{(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } x_n \notin \mathbb{Q}^*,\ \forall x_1 \in \mathbb{N}^*\right\}$ este infinită.

Soluție:

a) Relația de recurență devine $x_{n+1} = 2x_n + \sqrt{3x_n^2 - 2}$ și $x_1 = 1$.

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

$x_2 = 2x_1 + \sqrt{3x_1^2 - 2} > \sqrt{3x_1^2 - 2} = 1$ și inductiv toți termenii șirului sunt mai mari ca 1. În aceste condiții, $x_{n+1} = 2x_n + \underbrace{\sqrt{3x_n^2 - 2}}_{>0} > 2x_n$, șirul fiind așadar strict crescător. **1p**

De asemenea $x_2 = 3 \in \mathbb{N}^*$. Vom determina o relație de recurență omogenă (fără termeni liberi) a șirului, care să nu conțină radicali.

$\left(x_{n+1} - 2x_n\right)^2 = 3x_n^2 - 2$ și de aici $x_{n+1}^2 - 4x_{n+1}x_n + x_n^2 = -2$. Atribuindu-i lui *n* valoarea *n*+1, avem și relația $x_{n+2}^2 - 4x_{n+2}x_{n+1} + x_{n+1}^2 = -2$. Scăzându-le obținem $x_{n+2}^2 - x_n^2 - 4x_{n+2}x_{n+1} + 4x_{n+1}x_n = 0$ sau, altfel, $\left(x_{n+2} - x_n\right)\left(x_{n+2} + x_n - 4x_{n+1}\right) = 0$. Șirul fiind strict crescător, rezultă $x_{n+2} + x_n - 4x_{n+1} = 0$ sau $x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$. **2p**

Din această ultimă relație de recurență și din faptul că x_1 și x_2 sunt numere naturale, se deduce, prin inducție, că toți termenii șirului sunt numere întregi. Cum termenii sunt strict pozitivi, ei sunt numere naturale nenule. **1p**

<u>*Observație*</u> Acum se poate arăta ușor că $x_n = \frac{3+\sqrt{3}}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Vom considera $b = 1$. Deoarece diferența dintre două pătrate perfecte nu poate fi 2 rezultă că indiferent ce valoare număr natural nenul ar lua x_1, numărul $x_1^2 - 2$ nu este pătrat perfect. **2p**

Aceasta conduce la faptul că x_2 este irațional. Rezultă că mulțimea *A* conține toate perechile $(a, 1)$ cu $a \in \mathbb{N}^*$, fiind așadar infinită. **1p**